COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | /EC

FACOLTA' DI ECONOMIA

ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 5 Febbraio 1997

1) Dato il problema

$$P: \begin{cases} \min(c_1x_1 + c_2x_2) \\ 4x_1 + x_2 \quad - x_3 \qquad\qquad = 1 \\ x_1 \quad + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad = 1 \\ ax_1 + x_2 \qquad\qquad\quad - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \text{i} = 1,\ldots 5 \end{cases}$$

a) dire, giustificando, per quali valori di c_1, c_2 ed a

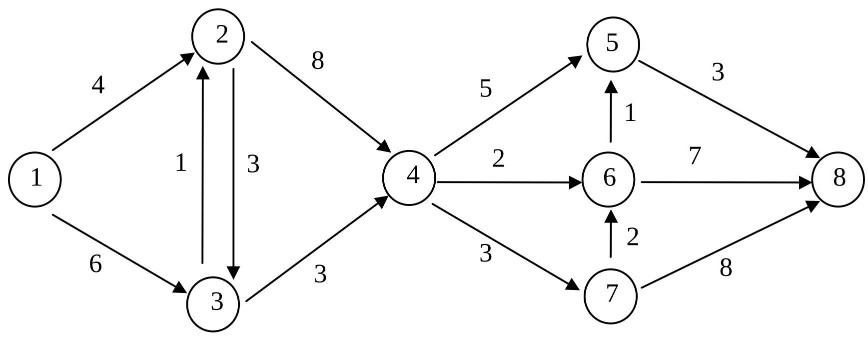
- in una soluzione ammissibile si ha x_1=x_2=1/5;
- la soluzione ottima è unica ed in essa risulta x_1=x_2=1/5;
- in una soluzione ottima si ha x_1=x_2=1/5 ed inoltre non c'è unicità per le soluzioni ottime. In questo caso determinarle tutte;
- il terzo vincolo è ridondante;

b) posto a=5 dire se esistono, ed in tal caso determinarli, valori di c_1, c_2 per i quali

- il duale di P ha regione ammissibile vuota;
- il duale di P non ha soluzioni ottime finite.

2) Dato l'insieme $S = \{(x_1, x_2) \in R^2\!: \; x_1 + 2x_2 \leq 4; \; x_1 + x_2 \leq 2; \; x_1, x_2 \geq 0 \}$, trovare il punto di S che ha minima distanza euclidea dal punto (2,2).

3) Data la seguente rete (nella quale i numeri sugli archi sono le capacità massime):



determinare il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 8, (utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson) ed un taglio di capacità minima.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate.

COGNOME	
NOME	
N. MATRICOLA	/EC

FACOLTA' DI ECONOMIA

ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 26 Marzo 1997

1) Dato il problema

$$P: \begin{cases} \min(c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ x_1 - 2x_2 \quad - x_3 \qquad = -2 \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 7 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

a) rappresentare la regione ammissibile del problema nel piano (x_1, x_2). Dalla sola rappresentazione geometrica (quindi senza calcolarle) stabilire se P ha soluzioni di base degeneri oppure no;
b) calcolare tutte le soluzioni di base di P e verificare la correttezza della risposta data in a).
c) Esistono valori di c_1 e c_2 per cui P non ha soluzioni ottime finite?
d) Posto $c_1 = 2,\ c_2 = 1,$ risolvere P con l'algoritmo del simplesso.

2) Scrivere il duale del seguente problema:

$$\begin{cases} \min(2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases}.$$

Risolvere geometricamente il problema duale e determinare la soluzione ottima del problema dato usando il teorema degli scarti complementari.

3) Risolvere il problema dei trasporti avente le disponibilità a_1, a_2, a_3, a_4, le richieste b_1, b_2, b_3 ed i costi c_{ij} i=1,...,4; j=1,...,3 indicati nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	2	3	12
A_2	1	4	7	8
A_3	2	5	1	15
A_4	4	3	3	5
	8	16	16	

Distinguere nella soluzione ottima le variabili di base e non di base e dire se tale soluzione ottima è degenere.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | **/EC**

FACOLTA' DI ECONOMIA

ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 3 Giugno 1997

1) Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

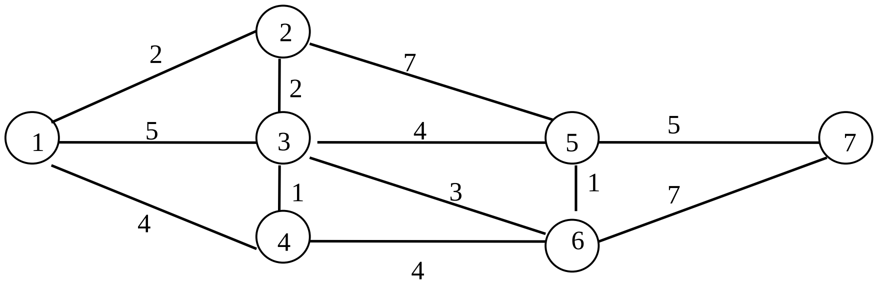
$$P: \begin{cases} \min(-2x_1 + 4x_2) \\ 4x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 3 \\ 2x_1 - 11x_2 \ge -11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Rappresentare il problema geometricamente e successivamente scriverlo in forma standard.

a) Dire se il problema ha soluzioni di base degeneri ed in caso affermativo per ognuna di esse trovare tutte le basi asoociate.
b) Determinare la tabella del simplesso relativa alla soluzione che ha in base le componenti x_1, x_3 e x_5 e dimostrare che tale soluzione e' ottima.
c) La soluzione ottima determinata al punto b) e' unica? Giustificare la risposta sia facendo uso della tabella, sia geometricamente.
d) Scrivere il duale del problema P e risolverlo. La soluzione ottima del duale e' unica? Se non e' unica, determinare tutte le soluzioni ottime del duale.

2) Determinare, con il metodo dei piani secanti, una soluzione ottima del problema ottenuto dal problema P dell'esercizio 1) con l'aggiunta del vincolo di interezza sulle variabili. Risolvere sia con tabelle che per via geometrica, rappresentando i tagli nel piano delle variabili x_1, x_2.

3) Si consideri il problema di determinare l'albero di supporto minimo sul seguente grafo (i numeri riportati sugli archi sono i costi):



Verificare se gli algoritmi di Kruskal e di Prim conducono o no alla stessa soluzione ottima..

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | **/EC**

FACOLTA' DI ECONOMIA

ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 24 Giugno 1997

1) Sia dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$P:\begin{cases}\min(2x_1+3x_2)\\ 3x_1+x_2\geq 3\\ x_1+x_2\geq 2\\ x_1\leq k\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

a) Al variare del parametro reale *k*, usando considerazioni geometriche, si determinino le soluzioni di base di P, specificando se sono degeneri o no e si dica quale e' la soluzione ottima.
b) Risolvere il problema P con l'algoritmo del simplesso per k=1 e verificare la correttezza della soluzione ottima trovata confrontandola con i risultati ottenuti al punto a).
c) Si consideri il caso k>2. Si scriva il duale di P e si dica se una soluzione ottima del duale ha la componente relativa al vincolo $x_1 \leq k$ positiva o nulla. Dire se in questo caso il duale ha un'unica soluzione ottima e perche'.

2) Sono dati 5 macchinari diversi e 5 lavoratori, ciascuno dei quali puo' lavorare con uno qualunque dei macchinari. Nella tabella seguente l'elemento di posto (i,j) e' il tempo che il lavoratore i impiega ad eseguire il lavoro j:

5	10	9	4	7
2	5	4	2	6
3	7	3	9	3
4	1	5	3	7
1	7	5	6	8

Risolvere il problema di assegnare i lavoratori ai macchinari in modo che il tempo totale impiegato dai lavoratori sia minimo.

3) Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare Intera utilizzando la tecnica del Branch and Bound:

$$\begin{cases}\min(5x_1+2x_2)\\ 5x_1+6x_2\geq 30\\ 14x_1-24x_2\geq 33\\ x_1,x_2\geq 0 \text{ interi}\end{cases}$$

Risolvere ogni passo per via geometrica.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | **/EC**

FACOLTA' DI ECONOMIA
ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA
Verona, 8 Luglio 1997

1) Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$P: \begin{cases} \min(c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ x_1 + a x_2 \le 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Porre $a = 1/3$ nel problema P, scriverlo in forma standard e successivamente:

- determinare la soluzione di base $\bar{x} = (\bar{x}_B = (x_1, x_2), \bar{x}_N = (x_3, x_4))$;
- dire per quali valori del vettore c la soluzione di base $\bar{x}$ e' l'unica soluzione ottima;
- determinare il vettore c in modo che $\bar{x}$ sia una soluzione ottima non unica di P. Verificare che esistono, a meno di una costante, due possibilita' e dare di cio' una giustificazione geometrica nel piano.

b) Porre $c_1 = -9, c_2 = -3$ nel problema P;

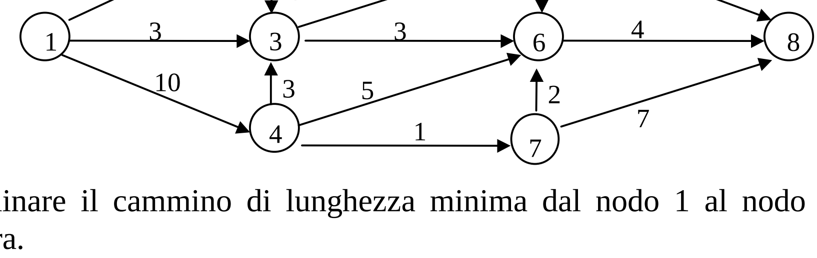
- studiare, al variare di a, il comportamento delle soluzioni ottime di P;
- dire (senza risolverlo) per quali valori di a il duale di P ammette estremo finito e per quali ha regione ammissibile vuota.

2) Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min[(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2] \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \end{cases}$$

a) Dire se il problema e' regolare;
b) dire se il problema e' convesso;
c) risolvere il problema geometricamente e dire se nel punto di ottimo vale la condizione di Kuhn-Tucker. Dare una giustificazione teorica del risultato trovato.

3) Dato il seguente grafo (nel quale i numeri sugli archi sono le distanze)



determinare il cammino di lunghezza minima dal nodo 1 al nodo 8, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra.
N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate.

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | /EC

FACOLTA' DI ECONOMIA

ESAME SCRITTO DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 16 Settembre 1997

1) E' dato il problema

$$P: \begin{cases} \min(-2x_1 + x_2) \\ 4x_1 - 2x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Dire se P ha soluzioni di base degeneri o no. In caso affermativo per ogni soluzione di base degenere determinare tutte le basi associate.

b) Determinare la tabella del simplesso relativa alla soluzione che ha in base le componenti x_1, x_3, x_5. Tale soluzione e' ottima? Verificare geometricamente la correttezza della risposta.

2) Si consideri il seguente problema:

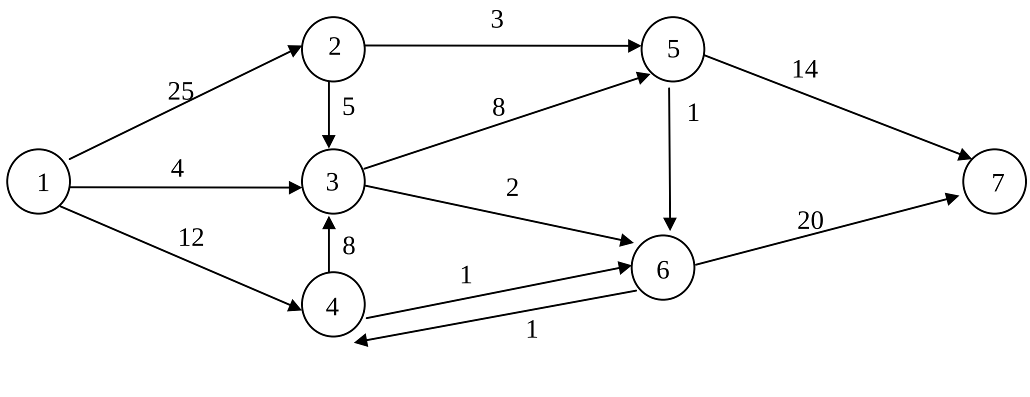
$$P: \begin{cases} \min(x_1 + 4x_2 + 3x_4) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

a) Risolvere P con l'algoritmo del simplesso duale.

b) Scrivere il duale di P, risolverlo geometricamente e usare la soluzione ottima del duale per determinare la soluzione ottima di P.

I due procedimenti usati in a) e in b) conducono alla stessa soluzione ottima?

3) Data la seguente rete (nella quale i numeri sugli archi sono le capacita' massime)



determinare il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 (utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson) ed un taglio di capacita' minima.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate.

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | /EC

FACOLTA' DI ECONOMIA

PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA (I parte)

Verona, 18 Novembre 1997

1) E' dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$P: \begin{cases} \min(2x_1 + x_2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

a) La soluzione (1/2,1/2,0,0) e' di base?
b) La soluzione (1,0,0,0) e' di base?
c) Scrivere la tabella del simplesso relativa alla soluzione che ha in base le componenti x_3 e x_4. Tale soluzione e' ottima?
d) Rappresentare geometricamente il problema nel piano x_1, x_2; determinare tutti i vertici della regione ammissibile e le corrispondenti soluzioni di base, specificando se sono degeneri o no. Confrontare la risposta con quelle date ai punti a) e b).
e) Come si modifica la soluzione ottima di P se la funzione obiettivo viene sostituita con $2x_1 - x_2$?

2) Dato il problema

$$P: \begin{cases} \min(3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4) \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = k \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,4 \end{cases},$$

dire per quali valori di $k \in R$ il problema P ha soluzioni ottime finite e per quali ha regione ammissibile vuota. Esistono valori di $k \in R$ per cui P non ha soluzioni ottime finite?

COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

N. MATRICOLA | | | | | | | /EC

FACOLTA' DI ECONOMIA

PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA

Verona, 16 Dicembre 1997

1) Siano dati il problema

$$P:\begin{cases}\min z = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5)\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3\\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 2\\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,5\end{cases},$$

la tabella T:

-z	5	3	1	0	0	3
x_4	7	0	7	0	1	2
x_3	2	-1	3	1	0	1
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

ed il vettore $\ddot{\lambda} = (\ddot{\lambda}_1, \ddot{\lambda}_2) = (-1,-1)$.

a) Per quali valori di c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 T e' la tabella finale ottima del problema P e $\ddot{\lambda}$ e' soluzione ottima del duale di P?

b) Nel problema P si ponga $c_1 = 9, c_2 = -18, c_3 = 2, c_4 = 1, c_5 = -5$. Risolvere il problema P cosi' ottenuto con l'algoritmo del simplesso. Successivamente, trovare la soluzione ottima del duale di P.

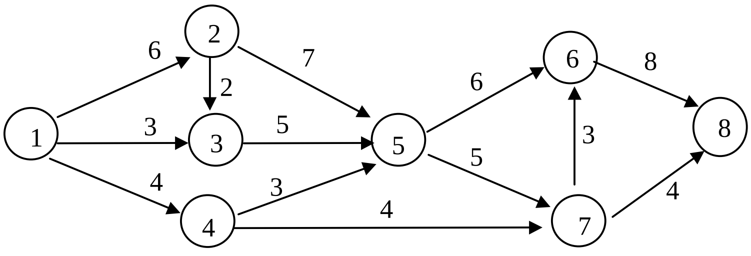
c) Dimostrare che se $c_3 < -c_1$ allora P non ha soluzioni ottime finite.

2) Si consideri il problema del trasporto di minimo costo totale schematizzato nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	6	4	5
A_2	2	4	3	4	2
A_3	4	3	8	5	3
	3	3	2	2	

Determinare una soluzione ottima di tale problema e una soluzione ottima del suo duale.

3) Data la seguente rete (nella quale i numeri sugli archi sono le capacita' massime)



determinare, usando l'algoritmo di Ford-Fulkerson, il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 8 ed un taglio di capacita' minima.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate.

COGNOME

NOME

N. MATRICOLA /EC

FACOLTA' DI ECONOMIA
PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA (II parte)

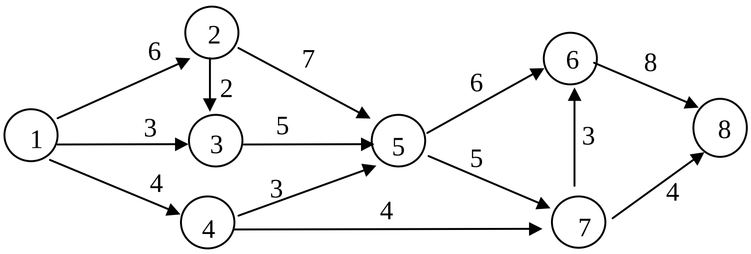
Verona, 16 Dicembre 1997

1) Si consideri il problema del trasporto di minimo costo totale schematizzato nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	6	4	5
A_2	2	4	3	4	2
A_3	4	3	8	5	3
	3	3	2	2	

Determinare una soluzione ottima di tale problema e una soluzione ottima del suo duale.

2) Data la seguente rete (nella quale i numeri sugli archi sono le capacita' massime)



determinare, usando l'algoritmo di Ford-Fulkerson, il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 8 ed un taglio di capacita' minima.

3) Dato il problema di programmazione lineare intera

$$P: \begin{cases} \min(2x_1 - x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ e interi} \end{cases}$$

e la tabella T:

	3/2	3/2	0	1/2	0
x_2	3/2	-1/2	1	1/2	0
x_4	18	4	0	1	1
		x_1	x_2	x_3	x_4

che e’ la tabella ottima del problema rilassato, determinare il taglio e rappresentarlo (insieme al problema) nel piano (x_1,x_2). Dire se il rilassamento del problema ottenuto con l’aggiunta di tale taglio ha soluzione ottima intera.

N.B.Tutte le risposte devono essere giustificate.

3) Si consideri il problema del trasporto di minimo costo totale schematizzato nella seguente tabella:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	6	4	5
A_2	2	4	3	4	2
A_3	4	3	8	5	3
	3	3	2	2	

Determinare una soluzione ottima di tale problema e una soluzione ottima del suo duale.