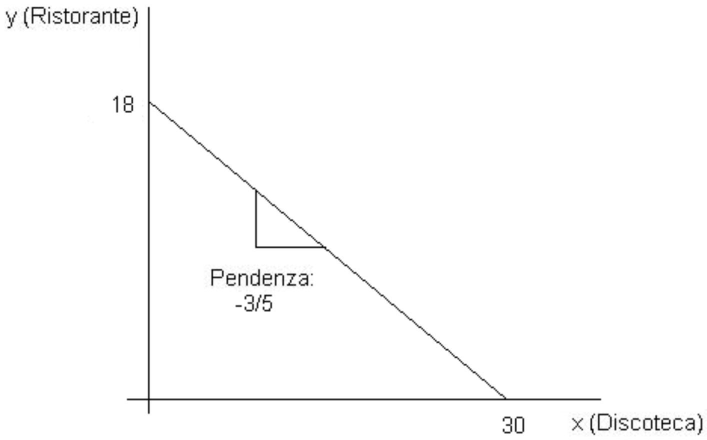
Microeconomia
Esercitazione A: le Scelte di Consumo

Giam Pietro Cipriani Eleonora Matteazzi Eugenio Peluso Andrea Roventini
Angelo Zago Luca Zarri

Università di Verona
a.a. 2008-2009



Esercizio 1a: vincolo di bilancio

Esercizio 1

Elena guadagna con il suo lavoro 900 euro al mese, che spende interamente tra serate in discoteca (il cui prezzo medio è di 30 euro) e pranzi al ristorante (il cui prezzo medio è pari a 50 euro).

a) Quale sarà il vincolo di bilancio di Elena? Fornirne una rappresentazione grafica.

b) Ipotizziamo ora che il costo medio di una serata in discoteca passi da 30 a 60 euro: come si modifica il vincolo di bilancio di Elena?

c) Cosa accade se invece si assume che, per via dell'inflazione, entrambi i prezzi subiscano un incremento del 50%?

d) Si supponga che Elena ottenga una importante promozione sul posto di lavoro e veda così il suo stipendio aumentare da 900 a 1500 euro al mese. Come cambia il suo vincolo di bilancio?

e) Come cambia analiticamente l'espressione del vincolo di bilancio di Elena nel caso in cui il governo introduca, simultaneamente, una tassa sulla quantità pari a $t = 5$ sul primo bene, una tassa sul valore (tassa ad valorem) sul secondo bene pari a $\tau = 0.01$ e una tassa globale pari a $u = 50$ sul suo reddito complessivo?

Soluzione

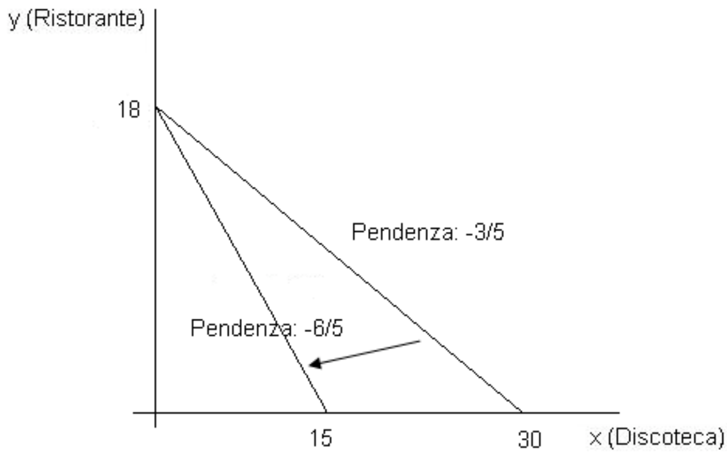
a) La discoteca è il bene x, con $p_x = 30$; il ristorante è il bene y, con $p_y = 50$; il reddito $m = 900$; il vincolo di bilancio è pari a : $30x + 50y = 900$. Per disegnare la retta di bilancio si osservi che: $p_x/p_y = 3/5$; $m/p_x = 30$; $m/p_y = 18$.

b) Questo è il caso di aumento del prezzo p_x. Il vincolo di bilancio ruota in senso orario facendo perno sull'intercetta m/p_y. Un aumento di p_x, a parità di m e p_y, riduce le possibilità di consumo di Elena (cf. Capitolo 2, pp. 22-24).

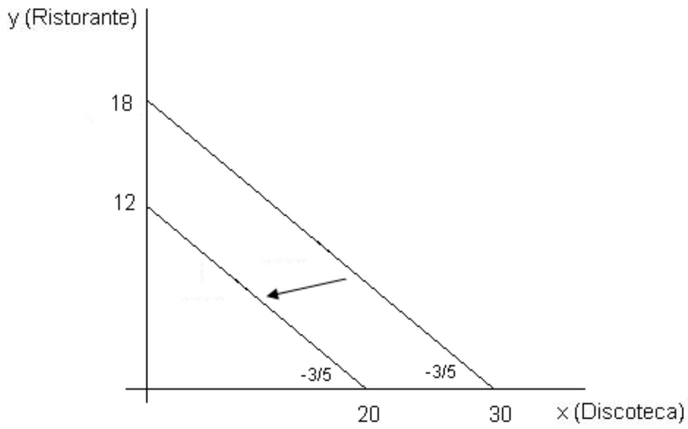
La nuova retta di bilancio di Elena sarà quindi: $60x + 50y = 900$, con $p_x/p_y = 6/5$; $m/p_x = 15$; $m/p_y = 18$.

c) Ora si assiste ad una simultanea variazione dei due prezzi. L'inflazione fa sì che i nuovi prezzi diventino: $p'_x = 30(1 + 0,50) = 45$ e $p'_y = 50(1 + 0,50) = 75$. La nuova retta di bilancio diventa: $45x + 75y = 900$ con $p'_x/p'_y = 3/5$; $m/p_x = 20$; $m/p_y = 12$.

Dal momento che i due prezzi aumentano nella stessa percentuale, non si hanno cambiamenti per quanto concerne il costo opportunità dei due beni. Ora però, naturalmente, Elena vede ridursi le proprie possibilità di consumo, dal momento che lo stesso reddito consente di acquistare minori



Esercizio 1b: vincolo di bilancio, aumento del prezzo p_x



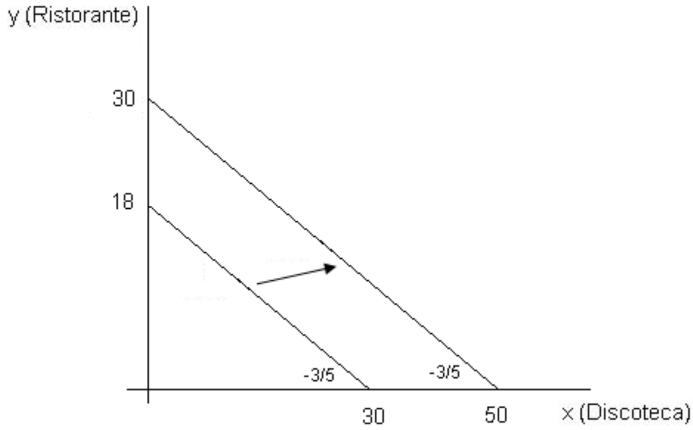
Esercizio 1b: vincolo di bilancio, variazione proporzionale dei prezzi

quantità dei due beni, essendo il loro prezzo aumentato. Graficamente, si ha uno spostamento parallelo del vincolo di bilancio verso sinistra.

Si ricordi che moltiplicare (dividere) entrambi i prezzi per una costante t equivale a dividere (moltiplicare) il reddito per quella stessa costante; ne deriva che se moltiplichiamo (dividiamo) per t entrambi i prezzi e il reddito, la retta di bilancio non si sposta (Capitolo 2, p. 24).

d) La promozione ottenuta consente ad Elena di disporre mensilmente di un reddito pari a 1500 euro ($m' = 1500$). La nuova retta di bilancio è pari a: $30x + 50y = 1500$, con $p'_x/p'_y = 3/5$; $m/p_x = 50$; $m/p_y = 30$

A parità di rapporto tra i prezzi, l'aumento di reddito da m a m' produce un ampliamento delle possibilità di consumo di Elena. Graficamente, si registra quindi uno spostamento in parallelo verso destra della retta di bilancio (senza che la sua inclinazione subisca variazioni; cfr Capitolo 2, p. 22). Ci possiamo anche chiedere: che cosa sarebbe successo se, anziché per effetto di una promozione, (i) il reddito di Elena fosse aumentato a seguito di una situazione inflazionistica e se (ii), per questa stessa ragione, anche i prezzi dei due beni fossero aumentati allo stesso tasso a cui supponiamo sia aumentato il reddito? Possiamo concludere che l'insieme di bilancio del consumatore non avrebbe subito alcuna alterazione e che pertanto è logico ritenere che non sarebbe cambiata neppure la scelta ottimale di Elena (Capitolo 2, p. 29).



Esercizio 1b: vincolo di bilancio, aumento del reddito

e) Il vincolo di bilancio diventerà: $(30+t)x + (1+\tau)50y = 900 - u \implies 35x + 50,5y = 850.$

Esercizio 2

Giorgio è molto sportivo ed ama praticare sia il tennis che il calcio a cinque con gli amici. Il prezzo di ogni partita di tennis (T) è pari a $P_T = 12$, mentre il prezzo che deve pagare individualmente per affittare un campo da calcio a cinque per una sera con gli amici (C) è $P_C = 5$. Il reddito complessivo che Giorgio può spendere per mantenersi in forma praticando le sue due attività sportive preferite è pari a 300 euro, mentre la sua funzione di utilità è data da $U = T^2C^3$.

a) Chiarire sia in termini analitici che attraverso una rappresentazione grafica qual è il vincolo di bilancio di Giorgio.

b) Calcolare il saggio marginale di sostituzione (MRS) tra T e C, alla luce delle preferenze di Giorgio.

c) Calcolare, infine, il suo paniere di consumo ottimo.

Esercizio 3

La famiglia Celestini (di Lugano) spende tutto il suo reddito (m), pari a 12.000 euro, per imbiancare di rosa la propria casa o per acquistare altri beni. Indicheremo con x la somma spesa per imbiancare casa e y il denaro speso per gli altri beni. Questo implica che $p_x = p_y = 1$.

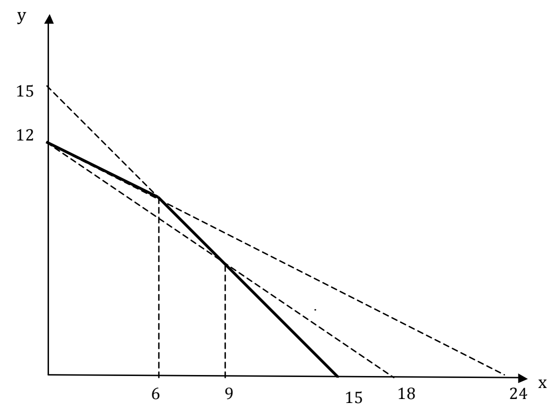
a) Scrivere e e tracciare il vincolo di bilancio.

b) Supponiamo ora che il governo svizzero offra un sussidio (s) pari al 50% della somma spesa per i lavori di tinteggiatura, ma fino ad un montante massimo di 3000 euro. Determinare e rappresentare su un grafico l'insieme delle possibilità di consumo (insieme di bilancio) ed il vincolo di bilancio della famiglia Celestini.

c) Supponiamo ora che sia possibile appaltare i lavori di ristrutturazione alla ditta italiana "Arru&Soddu-white system" che accorda in ogni caso uno sconto, ma non permette di usufruire del sussidio. Qual è lo sconto minimo che potrebbe rendere interessante affidare i lavori alla ditta italiana?

d) Se lo sconto accordato è di 1/3 della somma spesa, si determini il vincolo di bilancio complessivo della famiglia Celestini, usando le risposte ai punti b) e c) e lo si tracci in rosso sul grafico.

e) Supponiamo che le preferenze dei Celestini siano descritte dalla funzione di utilità $U(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$. Quali saranno le scelte della famiglia?



Esercizio 3b: sussidio, insiemi di bilancio e vincoli di bilancio

f) Supponiamo infine che le preferenze della famiglia siano descritte dalla funzione di utilità $U(x, y) = 5x^{6/5}y^{1/5}$. Quali saranno le scelte della famiglia? Commentare.

Soluzioni

a) Vincolo di bilancio: $x + y = 12000 \implies y = 12000 - x$.

b) Insieme delle possibilità di consumo in presenza del sussidio:

$$\begin{aligned} (1-0,5)x + y &\leqslant 12000, && \text{se } x \leqslant 6000 \ (s < 3000); \\ x + y &\leqslant 15000, && \text{se } x > 6000 \ (s = 3000). \end{aligned}$$

I corrispondenti vincoli di bilancio sono:

$$\begin{aligned} (1-0,5)x + y &= 12000, && \text{se } x \leqslant 6000 \ (s < 3000); \\ x + y &= 15000, && \text{se } x > 6000 \ (s = 3000). \end{aligned}$$

c) Insieme delle possibilità di consumo offerto dalla ditta italiana $(1 - s)x + y \leqslant 12000$. Perché non sia totalmente incluso nell'insieme di bilancio del punto b), occorre che $12000/(1 - s) > 15000$. Risolvendo la disuguaglianza si trova che $s > 0.20$: lo sconto deve quindi essere almeno del 20%, altrimenti l'impresa italiana non sarà mai conveniente.

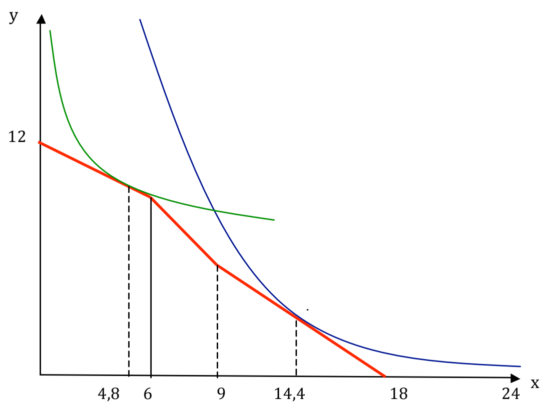
d) Se lo sconto è di 1/3 il vincolo di bilancio è: $(1 - 1/3)x + y = 12000$. I Celestini sceglieranno lo sconto se l'importo dei lavori è almeno pari a 9000.

Tenendo conto delle diverse opportunità, le possibilità di consumo sono non convesse:
$(1 - 0,5)x + y \leqslant 12000 \quad x \leqslant 6000$
$x + y \leqslant 15000 \quad 6000 \leqslant x \leqslant 9000$
$(1 - 1/3)x + y \leqslant 12000 \quad x > 9000$.

E i vincoli di bilancio (in forma esplicita) sono:
$y = 12000 - 0,5x \quad x \leqslant 6000$
$y = 15000 - x \quad 6000 \leqslant x \leqslant 9000$
$y = 12000 - 2/3x \quad x > 9000$.

e) Si devono calcolare le utilità marginali dei beni x e y:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{5}x^{-4/5}y^{4/5} \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{4}{5}x^{1/5}y^{-1/5}$$



Esercizio 3d: sussidio, sconto e vincolo di bilancio

Si ottiene la pendenza delle curve di indifferenza calcolando il saggio marginale di sostituzione (MRS):

$$MRS = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = -\left(\frac{1}{5}x^{-4/5}y^{4/5} * \frac{5}{4}x^{-1/5}y^{1/5}\right) = \frac{y}{4x}$$

Le curve d'indifferenza, quando intersecano la bisettrice hanno una pendenza pari a $1/4$. La scelta ottimale della famiglia si ha quando il vincolo di bilancio ha la stessa pendenza di una curva d'indifferenza, cioè quando sono tangenti. Risolvendo il problema di massimizzazione per ciascuno dei tre vincoli di bilancio determinati al punto (d) e scegliendo l'unica soluzione ammissibile, otteniamo che $x^* = 4800$ e $y^* = 9600$:

$$\begin{cases} x \leqslant 6000 \\ y = 12000 - 0,5x \\ \frac{y}{4x} = \frac{1}{2} \quad \to \quad y = 2x \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^* = 4800 \\ y^* = 9600 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{scelta ottimale}$$

$$\begin{cases} 6000 \leqslant x \leqslant 9000 \\ y = 15000 - x \\ \frac{y}{4x} = 1 \quad \to \quad y = 4x \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3000 \\ y = 12000 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{non accettabile}$$

$$\begin{cases} x > 9000 \\ y = 12000 - \frac{2}{3}x \\ \frac{y}{4x} = \frac{2}{3} \quad \to \quad y = \frac{8}{3}x \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3600 \\ y = 9600 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{non accettabile}$$

f) Le utilità marginali dei beni x e y sono:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{4}{5}x^{-1/5}y^{1/5} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{5}x^{4/5}y^{-4/5}$$

Il saggio marginale di sostituzione (MRS) è:

$$MRS = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \frac{4y}{x}$$

Risolvendo il problema di massimizzazione per ciascuno dei tre vincoli di bilancio determinati al punto (d) e scegliendo l'unica soluzione ammissibile, otteniamo che $x^* = 14400$ e $y^* = 2400$:

$$\begin{cases} x \leqslant 6000 \\ y = 12000 - 0,5x \\ \frac{4y}{x} = \frac{1}{2} \quad \to \quad y = \frac{1}{8}x \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 19200 \\ y = 2400 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{non accettabile}$$

$$
\begin{cases} 6000 \leqslant x \leqslant 9000 \\ y = 15000 - x \\ \frac{4y}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12000 \\ y = 3000 \end{cases} \implies \text{non accettabile}
$$

$$
\begin{cases} x > 9000 \\ y = 12000 - \frac{2}{3}x \\ \frac{4y}{x} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{6}x \end{cases} \implies \begin{cases} x^* = 14400 \\ y^* = 2400 \end{cases} \implies \text{soluzione ottimale}
$$

Esercizio 4

Laura è determinata ad occupare il proprio tempo libero mettendo in pratica l'antico detto "mens sana in corpore sano" e cerca quindi di conciliare la sua passione per il teatro classico con la cura del proprio corpo, facendo spesso attività fisica in palestra. Le preferenze di Laura tra una serata a teatro e un pomeriggio in palestra possono essere rappresentate attraverso la funzione di utilità seguente: $U(x, y) = x^{1/2}y^{1/3}$, ove x e y sono le quantità dei due beni consumate ogni anno (ovvero, rispettivamente, il numero di serate che Laura trascorre a teatro in un anno e il numero di pomeriggi in cui si dedica invece alla palestra). Le sue preferenze sono cioè di tipo Cobb-Douglas, con $a = 1/2$ e $b = 1/3$. I prezzi dei due beni sono $p_x = 9$, e $p_y = 6$, rispettivamente, mentre il suo reddito complessivo è pari a $m = 300$.

a) Determinare il paniere di consumo ottimale di Laura.

b) Determinare la curva di domanda dei due beni e dire di che tipo di beni si tratta.

c) Determinare la curva di Engel e dire di che tipo di beni si tratta.

Esercizio 5

Domenico spende tutto il suo reddito R per acquistare soltanto due beni: panini Big Jack e DVD di Amy Men. Le sue preferenze sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2/2 + x_2$, dove x_1 è il consumo di panini e x_2 il suo consumo di DVD. Il prezzo di un DVD è di 1 euro e quello di un panino è di $p < 1$ euro.

a) Determinare e tracciare la funzione di domanda inversa di Domenico per i panini.

b) Supponiamo ora che $R = 3$ e $p = 0,5$. Quanti panini acquisterà Domenico? Quanti ne avrebbe presi se il prezzo di un panino fosse stato di un euro?

c) Tracciare la curva reddito-consumo di Domenico per $p = 0,5$.

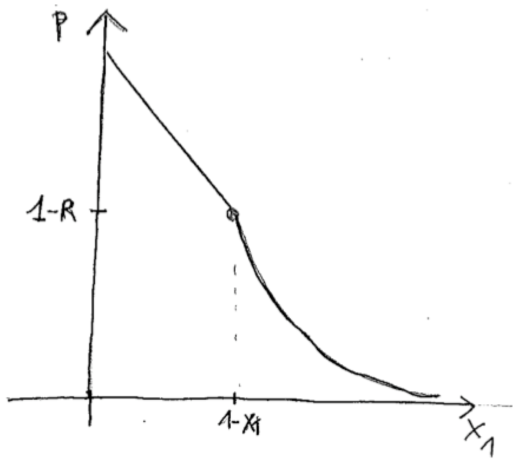
Soluzione

a) Il vincolo di bilancio è: $px_1 + x_2 = R$. Calcoliamo i MRS dei due beni:

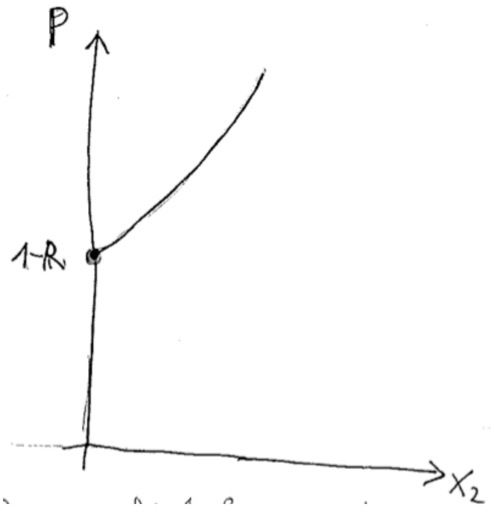
$$
MRS = -\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{1 - x_1}{1}.
$$

Per ottenere le domande dei due beni dobbiamo uguagliare l'MRS al rapporto tra i prezzi dei due beni e mettere a sistema quest'ultima uguaglianza con il vincolo di bilancio:

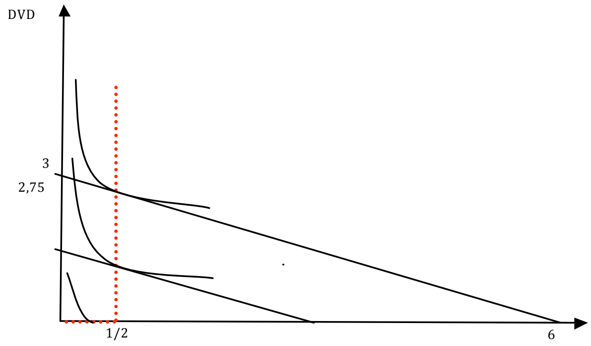
$$
\begin{cases} 1 - x_1 = p \\ px_1 + x_2 = R \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 1 - p \\ x_2 = R - p + p^2 \end{cases}
$$



Esercizio 5a: la domanda di x_1



Esercizio 5a: la domanda di x_2



Esercizio 5c: curva reddito-consumo

La domanda inversa di DVD è $p = 1 - x_1$. Si noti come la domanda del bene x_1 non dipende dal reddito. Riscrivendo la domanda di panini come $x_2 = R - p(1-p)$, possiamo identificare tre casi al variare di R:

$$R = p(1-p) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = R/p \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$R < p(1-p) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = R/p \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{Domenico vorrebbe consumare più } x_2\text{, ma non può}$$

$$R > p(1-p) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1-p \\ x_2 = R - p(1-p) \end{cases}$$

b) Se $R = 3$ e $p = 0,5$,

$$\begin{cases} x_1^* = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5 \\ x_2^* = R - p + p^2 = 3 - 0.5 + 0.25 = 2,75 \end{cases}$$

Se $R = 3$ e $p = 1$, $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 3$.

c) Se $p = 0.,5$, il vincolo di bilancio diventa $0,5x_1 + x_2 = R$, cioè $x_2 = R - 0.5x_{1.}$. I consumi ottimali di x_1^* e x_2^* saranno dati da:

$$\begin{cases} x_1^* = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5 \\ x_2^* = R - p + p^2 = R - 0.5 + 0.25 = R - 0,25 \end{cases}$$

Il consumo di DVD è fisso, mentre quello di panini dipende dal reddito. La curva di reddito consumo è rappresentata nel grafico.

Esercizio 6

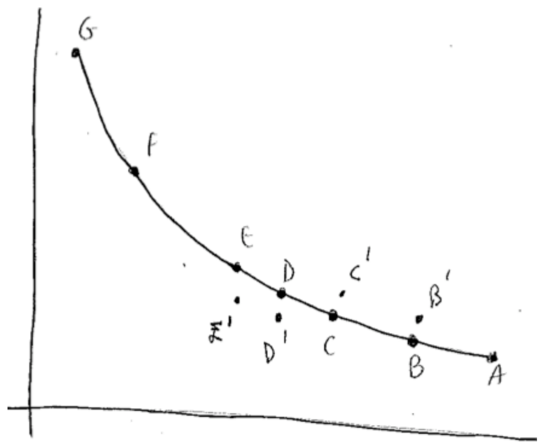
Francesco Petrarca a scuola detesta l'economia e la matematica. Più aumenta il numero di ore di economia o di matematica, meno è contento. Le sue preferenze sono convesse.

a) Ricordare le proprietà delle preferenze di un individuo razionale.

b) Tracciare qualche curva d'indifferenza del Petrarca, mettendo le ore di economia in ascissa e quelle di matematica in ordinata

c) Le curve d'indifferenza sono inclinate positivamente o negativamente?

d) Sono concave o convesse?



Esercizio 7a: panieri e curva d'indifferenza

Esercizio 7

I panieri di beni della tabella sottostante (x = ore in moto, y = ore in discoteca ogni mese) garantiscono al consumatore Valentino Verdi lo stesso livello di utilità:

	A	B	C	D	E	F	G
X	360	300	240	180	160	120	80
Y	80	96	120	160	184	240	360

a) Verificare che la curva d'indifferenza è convessa.

b) Le preferenze del consumatore sono continue e monotone. Dati i prezzi $p_x = 3$ e $p_y = 6$, si ipotizzi che Valentino consumi il paniere A. Mostrare che potrebbe raggiungere un livello più elevato di soddisfazione senza spendere un euro di più, per esempio riducendo la consumazione mensile di x a 300 ore.

c) Utilizzando la logica del punto precedente, mostrare che un solo paniere tra quelli indicati può rappresentare una scelta ottimale.

d) Qual è il reddito R necessario al consumatore per acquistare il paniere individuato al punto precedente?

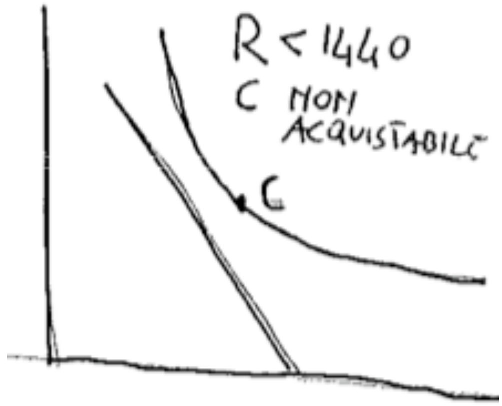
e) Rappresentare graficamente la situazione di scelta ottima del consumatore, spiegando perché se il suo reddito fosse stato superiore o inferiore a R, il paniere scelto al punto c non sarebbe stato più quello ottimale.

Soluzione

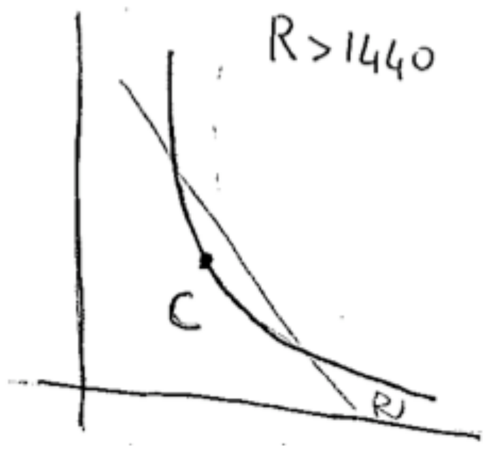
a) Si può dedurre graficamente osservando che il segmento che unisce due punti qualsiasi giace sempre al di sopra della curva d'indifferenza. Inoltre, uno dei modi per accertare la convessità di una funzione f consiste nel fatto che, presi due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ qualsiasi, si ha che $f[(x_1 + x_2)/2] \leqslant [f(x_1) + f(x_2)]/2$. Esaminando i punti disponibili, questa condizione è sempre verificata.

b) Se si consumano 60 unità di x in meno, si risparmiano 180 euro con cui è possibile acquistare 30 unità di y in più. Si arriva quindi al paniere $(300, 110)$ che è strettamente preferito a B a quindi ad A, per la transitività delle preferenze. A non è quindi un paniere ottimale.

c) Ripetendo il ragionamento del punto precedente, si osserva che l'unico paniere non "dominato" da altri è il paniere C. Tale paniere consente infatti di ottenere la stessa utilità degli altri panieri con



Esercizio 7e: reddito e scelta del paniere ottimale



Esercizio 7e: reddito e scelta del paniere ottimale

una spesa inferiore: $p_x x_c + p_y y_c = 3 * 240 + 6 * 160 = 1440$ (si confronti la spesa di C con quella degli altri panieri).

d) $R_c = 1440$.

e) Se il reddito è inferiore a 1440 il paniere C è esterno al vincolo di bilancio e non può essere consumato. Se il reddito è maggiore di 1440, esiste un intorno di C contenuto nel vincolo di bilancio e per le ipotesi di continuità e di monotonicità delle preferenze esiste nell'insieme di bilancio almeno un paniere strettamente preferito a C. Quindi C non puo' essere scelto da un consumatore razionale.

Esercizio 8

Marta è abituata a bere 1 tazza di caffé (che prepara utilizzando 10 grammi di polvere di caffé) con due cucchiaini di zucchero (equivalenti a 10 grammi di zucchero ciascuno). Per l'acquisto di caffé e zucchero al supermercato, Marta spende 15 euro, pagando entrambi i beni 5 euro al Kg.

a) Che tipo di relazione esiste tra caffé e zucchero per Marta? Come si rappresentano analiticamente le sue preferenze?

b) Scrivere il vincolo di bilancio di Marta e fornire una rappresentazione grafica del suo problema di scelta

c) Quale sarà la quantità consumata di ogni bene?

d) Per utilizzare in maniera più efficiente il proprio tempo, Marta modifica le proprie abitudini di spesa e decide di servirsi degli alimentari sotto casa, dove il caffè costa 15 euro al Kg. Quale sarà la nuova scelta ottima di Marta?

Esercizio 9

La soddisfazione di Osvaldo dipende solo dalle tazzine di caffè x_c e dalle zollette di zucchero x_z consumate. In ogni tazzina di caffè scioglie esattamente 2 cubetti di zucchero. Se riceve caffè o zucchero supplementari non dosati nella giusta proporzione, non ne fa alcun uso.

a) Ordinare in ordine crescente di preferenza i seguenti panieri (x_z, x_c): $A = (3, 0)$; $B = (0, 5)$; $C = (2, 3)$; $E = (3, 2)$; $F = (2, 4)$; $G = (3, 3)$, $H = (4, 2)$.

b) Supponiamo ora che una zolletta costi 1 euro e una tazza di puro caffè ne costi 2. Tracciare il vincolo di bilancio di Osvaldo quando possiede 8 euro. Indicare quali panieri appartengono al suo insieme delle possibilità di consumo.

c) Determinare l'espressione della funzione d'utilità di Osvaldo.

d) Scrivere il programma che risolve Osvaldo quando prende le sue decisioni di consumo e determinare la scelta ottimale.

e) Tracciare la curva reddito-consumo dopo aver determinato la sua equazione.

f) Per dei generici prezzi p_c, p_z e per un reddito R, scrivere le funzioni di domanda dello zucchero e del caffè: $x_c(p_c, p_z, R)$ e $x_z(p_z, p_c, R)$.

Soluzione

a) I beni sono perfettamente complementari. Ordinandole in ordine crescente di preferenza abbiamo: $H \succ E \sim G \succ C \sim F \succ A \sim B$.

b) Il vincolo di bilancio sarà: $2x_c + x_z = 8$. Sostituendo ad x_c e x_z i valori dei vari panieri otteniamo che solo A, C, E e H appartengo all'insieme delle possibilità di consumo di Osvaldo.

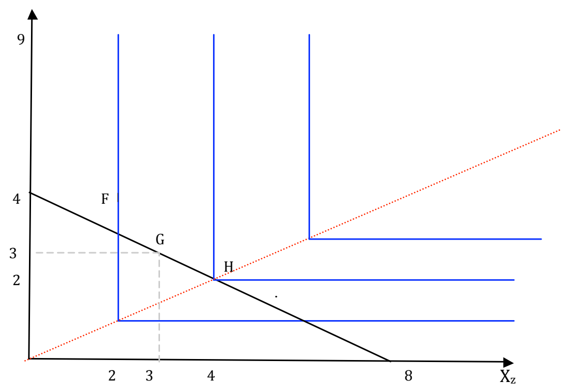
c) La funzione di utilità d'Osvaldo è: $U(x_z, x_c) = \min\left\{\frac{1}{2}x_z, x_c\right\}$.

d) Nel caso di beni complementari, le preferenze non sono regolari. In particolare, il MRS non è definito nei punti rilevanti, ovvero il MRS non può essere calcolato nei punti di non derivabilità in cui la curva di indifferenza interseca il raggio vettore uscente dall'origine di equazione $0,5x_z = x_c$. Pertanto, la soluzione del problema di ottimo del consumatore non è ottenibile, in questo caso, utilizzando il calcolo differenziale ed eguagliando MRS e rapporto tra i prezzi. Sappiamo però che: i) nel punto di ottimo deve valere che $0,5x_z = x_c$; ii) Marta deve rispettare il suo vincolo di bilancio per l'acquisto di zucchero e caffè. La soluzione del problema potrà dunque essere ottenuta risolvendo il sistema contenente l'equazione del raggio vettore $0,5x_z = x_c$, e quella relativa al vincolo di bilancio $2x_c + x_z = 8$:

$$\begin{cases} 0,5x_z = x_c \\ x_z + 2x_c = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_z^* = 2x_c \\ 2x_c + 2x_c^* = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_z^* = 4 \\ x_c^* = 2 \end{cases}$$

e) Per ottenere la curva reddito consumo è necessario riprendere il problema precedente ipotizzando un reddito pari a R:

$$\begin{cases} 0,5x_z = x_c \\ x_z + 2x_c = R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_z^* = 2x_c \\ 2x_c + 2x_c^* = R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_z^* = R/2 \\ x_c^* = R/4 \end{cases}$$



Esercizio 9: la scelta ottima del consumatore e la curva di reddito consumo

f) Le funzioni di domanda dello zucchero e del caffè: $x_c(p_c, p_z, R)$ e $x_z(p_z, p_c, R)$ si ottengono da:

$$\begin{cases} 0,5x_z = x_c \\ p_z x_z + p_c x_c = R \end{cases} \implies \begin{cases} x_z^* = 2x_c \\ 2p_z x_c + p_c x_c^* = R \end{cases} \implies \begin{cases} x_z^* = \frac{R}{p_z + p_{c/2}} \\ x_c^* = \frac{R}{2p_z + p_c} \end{cases}$$

Esercizio 10

Le preferenze di Gianni rispetto alle matite rosse e alle matite blu sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità: $u(x, y) = 2x + y$, dove x rappresenta la quantità di matite rosse e y la quantità di matite blu. Il prezzo delle matite è lo stesso: $p_x = p_y = 6$, mentre il reddito di cui dispone Gianni è pari a 24 euro. Quale sarà la sua scelta ottima?

Esercizio 11

Le preferenze di John relativamente a DVD e videocassette sono rappresentate dalla funzione di utilita $U(Q_d, Q_v) = Q_d + Q_v$, dove Q_d indica la quantità di DVD posseduti e Q_v la quantità di videocassette. Si dica che tipo di beni sono DVD e videocassette per John.

a) Qual è la sua scelta ottima, quando ogni anno il reddito disponibile per l'acquisto di questi beni è $R = 2000$ euro e i prezzi dei due beni sono rispettivamente $p_d = 50$ euro e $p_v = 20$ euro?

b) Scrivere le funzioni di domanda di questi due beni per generici R, p_d e p_v.

c) Come cambia la scelta ottima se John comincia ad amare i film in più lingue quindi è pronto sempre a scambiare 2 videocassette per un DVD? Quale sarebbe inoltre la scelta ottima se, in seguito, il costo delle videocassette aumentasse fino a 30 euro?

Soluzione

I beni sono sostituti perfetti.

a) Il vincolo di bilancio è: $50Q_d + 20Q_v = 2000 \implies Q_v = 100 - (5/2)Q_d$. La pendenza del vincolo di bilancio, pari al rapporto tra i prezzi dei due beni è 5/2. Le curve di indifferenza sono espresse da: $Q_v = \overline{U} - Q_d$, dove $\overline{U}$ esprime il livello di utilità. Dato che i beni sono sostituti perfetti il loro MRS è uguale ad uno, come si può notare anche dalle curve di indifferenza. La pendenza del vincolo di bilancio è superiore al MRS per cui siamo di fronte ad un ottimo di frontiera. Il punto di ottimo sarà dato dal punto di intersezione tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza più elevata. Dato il vincolo di bilancio, se $Q_d = 0 \implies Q_v = 100$, mentre se $Q_v = 0 \implies Q_d = 40$. Dato che i beni sono sostituti perfetti, John acquisterà 100 videocassette.

b) Per determinare le curve di domanda dei due beni è necessario considerare due casi a seconda che la pendenza del vincolo di bilancio sia uguale o diversa rispetto al MRS.

   i) Se $p_d = p_v$, il vincolo di bilancio coincide con una curva di indifferenza. Avremo quindi che: $MRS_{d,v} = p_d/p_v = 1 \implies Q_v = R/p - Q_d$.

   ii) Se $p_d \neq p_v$, non esiste una curva d'indifferenza tangente al vincolo di bilancio. In questo caso avremo che:
   $p_d > p_v \implies MRS_{d,v} < p_d/p_v \implies Q_v = R/p_v,\ Q_d = 0.$
   $p_d < p_v \implies MRS_{d,v} > p_d/p_v \implies Q_d = R/p_d,\ Q_v = 0.$

c) Se John è disposto a scambiare 2 videocassette per un dvd, la sua funzione di utilità sarà $U(Q_d, Q_v) = 2Q_d + Q_v$. Il saggio marginale di sostituzione tra i due bene sarà: $MRS_{d,v} = 2$. Dato che $2 = MRS_{d,v} < p_d/p_v = 5/2$, John non modificherà le sue scelte e acquisterà 100 videocassette (vedi punto a).

   Se $p_v = 30$, Avremo che $2 = MRS_{d,v} > p_d/p_v = 5/3$. In questo caso John acquisterà solo DVD. Dato il vincolo di bilancio $50Q_d + 30Q_v = 2000$, avremo che $Q_v = 0$ e $Q_d = 40$.

Esercizio 12

Le preferenze di Andrea sono rappresentabili mediante la seguente funzione di utilità: $u(x_1, x_2) = (x_1 - 6)(x_2 - 12)$ mentre i prezzi dei due beni 1 e 2 sono, rispettivamente $p_1 = 16$, $p_2 = 8$. Il reddito è pari a 400 euro.

a) Quali saranno le quantità dei due beni che Andrea vorrà acquistare, date le sue preferenze, il suo vincolo di bilancio e assumendo che $x_1 > 6$ e $x_2 > 12$?

b) Come cambia l'equilibrio se si suppone che il prezzo del bene 2 aumenti e divenga $p_2 = 16$?

c) Determinare l'elasticità della domanda al prezzo e dire di che tipo di beni si tratta.

d) Determinare l'elasticità della domanda al reddito e dire di che tipo di beni si tratta.

e) Determinare l'elasticità incrociata della domanda e dire di che tipo di beni si tratta.

Esercizio 13

La signora Giulia De Robertis consuma solo due tipi di beni: videocassette, la cui quantità sarà denominata x_1, e pacchetti di riso vialone nano, che denoteremo x_2. In tre città diverse, quindi di fronte a prezzi diversi, Giulia effettua le seguenti scelte:
A- Se $p_1 = 1$ e $p_2 = 1$, il paniere scelto è: $X = (1, 5)$
B- Se $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$, il paniere scelto è $Y = (1, 4)$
C- Se $p_1 = 2$ e $p_2 = 1$, il paniere scelto è $Z = (4, 1)$.
Si supponga che il paniere $(3, 3)$ sia sempre accessibile e esaurisca tutto il reddito di Giulia.

a) Determinare il reddito necessario per effettuare la spesa descritta in ognuna delle tre situazioni.

b) Confrontare i casi A e B. Le scelte osservate sono coerenti con l'assioma debole delle preferenze rivelate (WARP)? Giustificare la risposta analiticamente e illustrate graficamente.

c) Confrontare i casi B e C. Le scelte osservate sono coerenti con l'assioma debole delle preferenze rivelate? Giustificare la risposta analiticamente e graficamente. Cosa si può concludere per l'assioma forte delle preferenze rivelate?

Soluzione

a) $R_A = 1 * 1 + 1 * 5 = 6$; $R_B = 1 * 1 + 2 * 4 = 9$; $R_C = 2 * 4 + 1 * 1 = 9$.

b) Consideriamo se il paniere X può essere acquistato ai prezzi del paniere Y (caso B): $1 * 1 + 2 * 5 = 11 > R_A$. Il paniere X non è acquistabile ai prezzi del paniere Y. Il paniere Y è invece acquistabile ai prezzi del paniere X (caso A): $1*1+1*4 = 5 < R_B$. Il paniere X si rivela direttamente preferito a Y. Le osservazioni sono coerenti con il WARP.

c) Il paniere Y è acquistabile ai prezzi del paniere Z: $2*1+1*4 = 6 < R_C$. Il paniere Z è direttamente preferito a Y. Ai prezzi del paniere Y, il paniere Z è acquistabile: $1*4+2*1 = 6 < R_B$. Il paniere Y è quindi direttamente preferito a Z. In questo caso non vale l'assioma debole delle preferenze rivelate. Se non vale il WARP non può valere neanche il SARP perchè le condizioni richieste dall'assioma forte delle preferenze rivelate sono più stringenti rispetto a quelle del WARP.

Esercizio 14

Maria spende tutto il suo reddito per acquistare ranuncoli e malve. Per lei ranuncoli e malve sono perfetti sostituti: un fiore vale l'altro. Una pianta di ranuncoli costa \$4 (p_r) e una di malva \$5 (p_m).

a) Se il prezzo dei ranuncoli diminuisce a \$3, ne comprerà di più? Quale parte della variazione del consumo è dovuta all'effetto di reddito e quale all'effetto di sostituzione?

b) Rappresentare graficamente il vincolo di bilancio di Maria con i prezzi originari e un reddito (R) pari a \$120, quindi disegnare alcune curve di indifferenza e mostrare il punto di ottimo.

c) Ora supponiamo che il prezzo delle malve scenda a \$3 mentre quello dei ranuncoli resta invariato a \$4. Disegnare la nuova retta di bilancio e la curva di indifferenza più alta raggiungibile.

d) Quale dovrebbe essere il reddito di Maria dopo la diminuzione del prezzo delle malve per consentirle l'acquisto del paniere originario? Quale parte della variazione totale della domanda di Maria in seguito al calo del prezzo delle malve è dovuta all'effetto reddito? Quale all'effetto sostituzione?

Esercizio 15

Un individuo ha un reddito monetario pari a 300 euro e preferenze descritte dalla funzione di utilità $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$.

a) Si determini la scelta ottimale in corrispondenza dei prezzi $p_1 = 2$ e $P_2 = 5$.

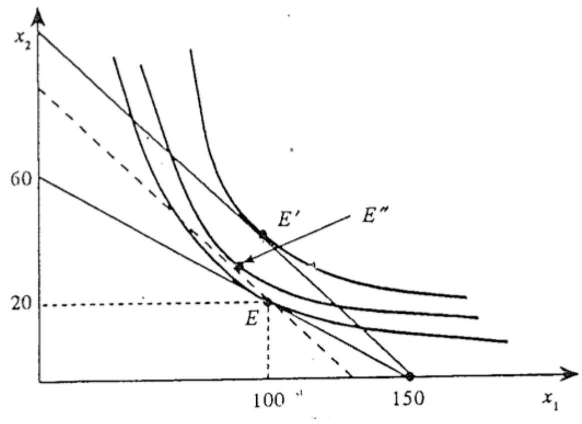
b) Come varia la scelta ottimale se p_2 diminuisce da 5 a 4?

c) Si scomponga la variazione intervenuta nelle domande ottimali di x_2 e x_1 a seguito della variazione del prezzo in effetto reddito ed effetto sostituzione seguendo:
i) il metodo di Slutsky;
ii) il metodo della variazione compensativa di Hicks.

Soluzione

a) La scelta ottimale si ha quando $MRS = p_1/p_2$. Mettendo a sistema con il vincolo di bilancio otteniamo:

$$\begin{cases} 2x_2/x_1 = 2/5 \\ 300 - 2x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ 300 - 10x_2 - 5x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^* = 100 \\ x_2^* = 20 \end{cases} \quad E = (100, 20)$$



Esercizio 15: effetti reddito e sostituzione

b) Se $p_2' = 4$:

$$\begin{cases} 2x_2/x_1 = 2/4 \\ 300 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ 300 - 8x_2 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 100 \\ x_2^* = 25 \end{cases} \quad E' = (100, 25)$$

c) Calcoliamo l'effetto reddito e l'effetto sostituzione con *il metodo di Slutsky.* Per acquistare il vecchio paniere basta un reddito pari a 280 euro:

$$x_1 p_1 + x_2 p_{2'} = R \qquad \Longrightarrow \qquad 100 * 2 + 20 * 4 = 280.$$

Quindi il reddito deve diminuire di 20 euro, infatti: $\Delta R = x_2 \Delta p_2 = 20 * (-1) = -20$ (linea tratteggiata nel grafico). Dati $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ e $R = 280$, la scelta ottima sarebbe:

$$\begin{cases} 2x_2/x_1 = 2/4 \\ 280 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ 280 - 8x_2 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 93,33 \\ x_2^* = 23,33 \end{cases} \quad E''(93,33, 23,33)$$

L'effetto sostituzione si ha calcola passando da E a E'', mentre l'effetto reddito si ottiene passando da E'' a E'. Cioè $\Delta x_1 = \Delta x_1^S + \Delta x_1^R$:

$$\Delta x_1^S = 93,33 - 100 = -6,66 \qquad\qquad \Delta x_1^R = 100 - 93,33 = 6,66,$$

per cui $\Delta x_1 = 0$. Invece $\Delta x_2 = 5$:

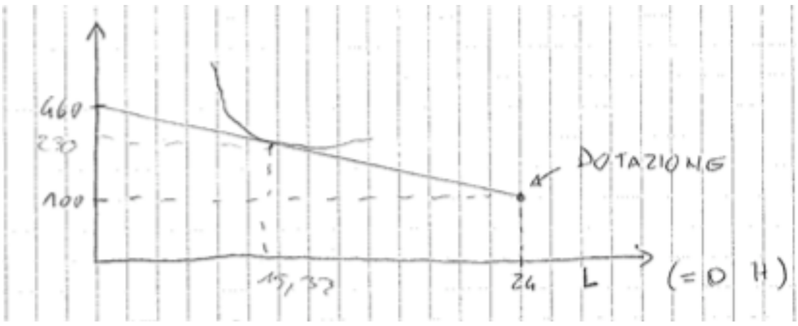
$$\Delta x_2^S = 23,33 - 20 = 3,33 \qquad\qquad \Delta x_2^R = 25 - 23,33 = 1,66.$$

Possiamo concludere che x_1 e x_2 sono beni normali ($\Delta x^R > 0$) e che la domanda di x_1 è inelastica a p_2.
Calcoliamo ora l'effetto reddito e l'effetto sostituzione con *il metodo della variazione compensativa di Hicks.* L'utilità del paniere originale è pari a: $U = U(100, 20) = 100^2 20 = 200000$. Il problema da risolvere consiste nel trovare un punto (E'') sulla curva di indifferenza $U(100, 20)$ associato ai nuovi prezzi:

$$\begin{cases} x_1^2 x_2 = 200000 \\ U'_{x_1}/U'_{x_2} = p_1/p_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^2 x_2 = 200000 \\ 2x_2/x_1 = 2/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 92,83 \\ x_2^* = 23,21 \end{cases}$$

Il costo del nuovo paniere è inferiore al reddito e pari a: $92,83 * 2 + 23,21 * 4 = 278,50$. Calcoliamo le variazioni di x_1 e x_2 scomponendole in effetti reddito e sostituzione:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^S + \Delta x_1^R = (92,83 - 100) + (100 - 92,83) = -7,17 + 7,17 = 0$$
$$\Delta x_2 = \Delta x_2^S + \Delta x_2^R = (23,21 - 20) + (25 - 23,21) = 3,21 + 1,79 = 5.$$



Esercizio 17: l'offerta di lavoro

Esercizio 16

Le preferenze di Andrea sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x, y) = (x - 30)y.$$

Si determini:

a) Le funzioni di domanda per i beni x e y.

b) Le quantità domandate da Gianni se il reddito che ha a disposizione è $m = 70$ e i prezzi dei due beni sono $p_x = p_y = 1$.

c) L'effetto reddito e l'effetto sostituzione dovuto ad un raddoppio del prezzo del bene y.

Esercizio 17

Data la funzione di utilità $U = CL$, dove C è il consumo ed L è il tempo libero, sapendo che il reddito non da lavoro è pari a 100 euro, che il salario orario (w) è pari a 15 euro e normalizzando il prezzo del bene di consumo a 1 euro:

a) Si determini algebricamente e graficamente l'offerta di lavoro;

b) Quale sarebbe l'effetto sull'offerta di lavoro di una tassa sul patrimonio del 50%? Quale effetto entra in gioco (reddito o sostituzione?).

c) Quale sarebbe invece l'effetto di una tassa proporzionale (τ) sul reddito da lavoro del 20%? Quale dei due effetti (reddito e sostituzione) predomina?

Soluzione

a) Il vincolo di bilancio è pari a: $C - 15(24 - L) - 100 = 0$. Il punto di ottimo si ha quando $U'_C/U'_L = p/w$. Mettendo a sistema questa condizione con il vincolo di bilancio si trova:

$$\begin{cases} L/C = 1/15 \\ C - 15(24 - L) - 100 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} L^* = 15,33 \\ C^* = 230 \end{cases}$$

Le ore di lavoro H saranno pari a $24 - L^* = 8,67$.

b) Una tassa sul patrimonio riduce il reddito non da lavoro da 100 euro a 50 euro lasciando inalterati i prezzi relativi. Vi sarà quindi solo un effetto reddito e C ed L si ridurranno:

$$\begin{cases} L/C = 1/15 \\ C - 15(24 - L) - 50 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} L = 13,67 \\ C = 205 \end{cases}$$

c) Una tassa proporzionale (τ) sul reddito da lavoro ridurrà il salario orario: $w' = w(1-\tau) = 15(1-0,2) = 12$.

$$\begin{cases} L/C = 1/12 \\ C - 12(24-L) - 100 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L = 16,17 \\ C = 194 \end{cases}$$

La tassa ha comportato un aumento di L dovuto al minore costo opportunità (prezzo) di L. L'effetto sostituzione è stato quindi superiore all'effetto reddito.

Esercizio 18

Francesco vuole decidere la sua offerta di lavoro. Un'ora di lavoro è remunerata con 20 euro e non si può lavorare più di 16 ore al giorno.

a) Tracciare il vincolo di bilancio di Francesco quando consuma un bene aggregato C con prezzo 1, e tempo libero L. Rappresentare graficamente la sua scelta ottima per preferenze monotone e convesse.

b) Il salario orario aumenta. Mostrare l'effetto sul consumo e sul tempo libero, evidenziando effetto di sostituzione ed effetto di reddito.

c) Il governo decide di dare un sussidio di 50 euro in più per tutte le persone che guadagnano meno di 100 euro. A partire da quante ore di lavoro Francesco perde il sussidio? Rappresentare graficamente l'insieme di bilancio.

d) Mostrare graficamente il caso in cui Francesco sceglie di usufruire del sussidio, lavorando di meno rispetto al caso senza sussidi.

Esercizio 19

Un individuo ha una dotazione pari a 20 euro nei due periodi (1 e 2). Può prendere a prestito denaro al tasso del 200% e prestare al tasso dello 0%.

a) Illustrare graficamente il suo vincolo di bilancio

b) Gli viene offerta la possibilità di lasciare la sua dotazione in cambio della disponibilità di 30 euro e di 15 euro rispettivamente nel periodo 1 e 2. Gli conviene accettare? Possiamo dirlo senza conoscere le sue preferenze?

c) E se l'offerta fosse 15 euro e 30 euro rispettivamente nel primo e nel secondo periodo?

Soluzione

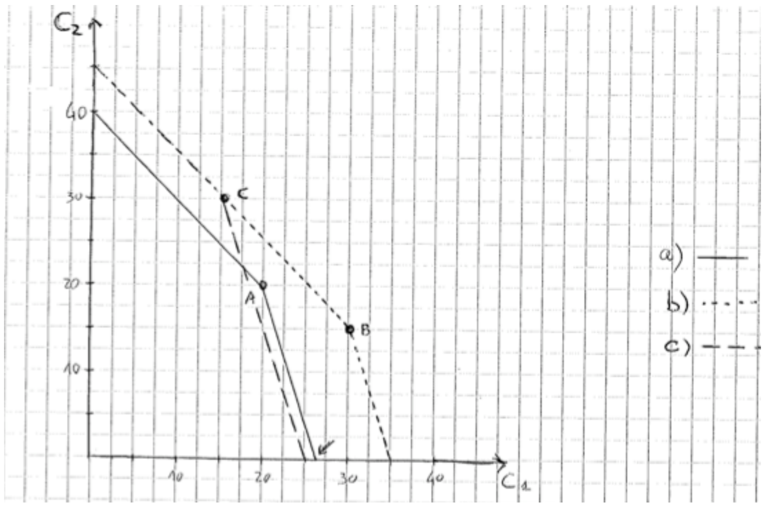
a) Calcoliamo il consumo massimo ottenibile nei due periodi:

$$C_1^{max} = 20 + \frac{20}{1+i} = 20 + \frac{20}{1+2} = 26,66$$
$$C_2^{max} = 20 + 20 = 40.$$

b) Per valutare se gli conviene accettare o no, calcoliamo il consumo massimo ottenibile con la nuova dotazione:

$$C_1^{max} = 30 + \frac{15}{1+2} = 35$$
$$C_2^{max} = 15 + 30 = 45.$$

La nuova proposta è superiore alla dotazione iniziale a prescindere dalle preferenze dell'individuo perchè i consumi massimi ottenibili nei due periodi sono entrambi superiori a quelli della dotazione iniziale.



Esercizio 19: scelta intertemporale di consumo

c) In questo caso non possiamo sapere se l'individuo accetterà la nuova proposta senza conoscere le sue preferenze, perchè i consumi massimi ottenibili nei due periodi non sono entrambi superiori a quelli ottenibili con la dotazione iniziale:

$$C_1^{max} = 15 + \frac{30}{1+2} = 25$$
$$C_2^{max} = 15 + 30 = 45.$$

Esercizio 20

Per Caio fa lo stesso consumare ora (periodo 1) o fra un periodo (periodo 2). La sua funzione di utilità è semplicemente $u(c_1, c_2) = c_1 + c_2$. La sua dotazione è 20 euro nel periodo 1 e 40 euro nel periodo 2. In un mercatino scopre un francobollo in vendita a 12 euro che è sicuro di poter rivendere a 20 euro nel secondo periodo. Non è un collezionista di francobolli e quindi non ricava alcuna utilità diretta dal conservare il francobollo, né gli costa alcunché.

a) Su un grafico disegnare la sua dotazione iniziale e il vincolo di bilancio intertemporale nel caso in cui decida di non comprare il francobollo e non sia possibile prendere a prestito denaro ma sia consentito conservarlo sotto il materasso.

b) Sullo stesso grafico segnare il punto relativo al paniere di consumo nel caso in cui decida di acquistare il francobollo. Gli conviene acquistare il francobollo?

c) Sullo stesso grafico disegnare il vincolo di bilancio nel caso in cui Caio decida di acquistare il francobollo e possa accedere ai mercati finanziari dove il tasso di interesse è del 50%. Disegnare anche qualche curva di indifferenza di Caio ed evidenziare la scelta ottimale.

d) Assumiamo ora che invece di essere perfetti sostituti, i consumi in giovinezza e vecchiaia siano perfetti complementi. La funzione di utilità diventa dunque la seguente: $v(c_1, c_2) = \min[c_1, c_2]$. Se Caio non può prestare né prendere a prestito, gli conviene acquistare il francobollo? Quale sarebbe la scelta invece se il vincolo di bilancio fosse quello trovato nel punto c?

Esercizio 21

Giada vive in due periodi, indicati come 1 e 2, nei quali consuma un unico bene per valori pari a c_1 e c_2. Il reddito a disposizione di Giada è rispettivamente R_1 e R_2. Le preferenze di Giada sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \ln c_2.$$

Si determini:

a) Il vincolo di bilancio di Giada per $R_1 = 1000$, $R_2 = 500$ e $r = 5\%$, dove r rappresenta il tasso di rendimento del risparmio.

b) Il vincolo di bilancio di Giada supponendo che il mercato dei capitali sia imperfetto, quindi il tasso di interesse a cui Giada prende a prestito è diverso dal tasso a cui viene remunerato il suo risparmio. I redditi sono ancora $R_1 = 1000$, $R_2 = 500$. Il tasso al quale viene remunerato il risparmio è ancora $r = 5\%$, mentre il tasso d'interesse a cui Giada prende a prestito è $r_p = 10\%$.

c) La scelta ottima di consumo e di risparmio di Giada quando il vincolo di bilancio è quello calcolato al punto (a).

Soluzione

a) Il vincolo di bilancio del periodo presente è pari a: $c_1 + s_1 = R_1$, dove con s_1 indichiamo il risparmio di Giada. Il vincolo di bilancio nel secondo periodo è pari a: $c_2 = R_2 + (1 + r)s_1$. Per ottenere il vincolo intertemporale, si ricava s_1 dalla seconda equazione e lo si sostituisce nel vincolo del primo periodo:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = R_1 + \frac{R_2}{1+r} \quad \Longrightarrow \quad c_2 = R_2 + (1+r)R_1 - (1+r)c_1$$

Sostituendo i valori del reddito e del tasso d'interesse otteniamo: $c_2 = 1550 - (1 + 0,05)c_1$. Il vincolo di bilancio ha una pendenza pari $-1,05$. Si noti che se $c_1 < R_1 = 1000$, il risparmio è positivo, mentre se $c_1 > 1000$, Giada prende a prestito.

b) Se nel periodo uno Giada risparmia, $s_1 > 0$ e il vincolo di bilancio coincide con quello determinato al punto precedente. Se invece Giada prende a prestito nel primo periodo, $s_1 < 0$, dobbiamo calcolare il nuovo vincolo intertemporale. Il vincolo di bilancio del periodo uno sarà pari a: $c_1 - R_1 = s_1$, mentre quello del periodo due diventa: $c_2 = R_2 - (1 + 0,10)(c_1 - R_1)$. Il vincolo intertemporale sarà quindi pari a: $c_2 = 1600 - (1 + 0,10)c_1$. I due vincoli hanno pendenza diversa, per cui si intersecheranno. Mettendo a sistema i due vincoli calcoliamo il loro punto di intersezione:

$$\begin{cases} c_2 = 1550 - (1+0,05)c_1 \\ c_2 = 1600 - (1+0,10)c_1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1000 \\ c_2 = 500 \end{cases}$$

I due vincoli si incontrano nel punto $E = (1000, 500)$. Il vincolo intertemporale sarà dato da una spezzata con angolo in E.

c) Il saggio marginale di sostituzione intertemporale è pari a: $MRS_{c_1,c_2} = U'_{c_1}/U'_{c_2} = c_2/c_1$. Il punto di ottimo deve appartenere al vincolo di bilancio e inoltre il MRS_{c_1,c_2} deve essere uguale all'inclinazione del vincolo di bilancio $(1 + r)$:

$$\begin{cases} c_2/c_1 = 1,05 \\ c_2 = 1550 - 1,05c_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,05c_1 \\ 1,05c_1 = 1550 - 1,05c_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2^* = 775 \\ c_1^* = 738,1 \end{cases}$$

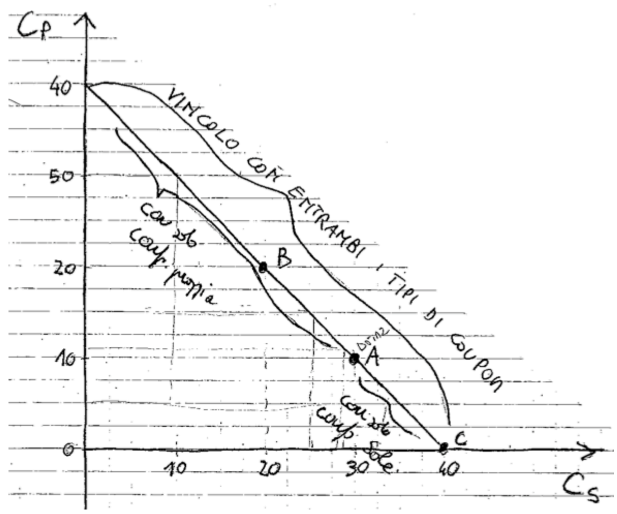
Il risparmio si ottiene sottraendo dal reddito del primo periodo il consumo del primo periodo: $s_1^* = R_1 - c_1 = 100 - 738,1 = 261,9$.

Esercizio 22

Mr Bean è avverso al rischio. Può giocare d'azzardo: vincere 600 euro con probabilità 3/4 e perdere 1000 euro con probabilità 1/4 . Se non vuole giocare non perde né vince nulla.

a) Possiamo dire in generale se giocherà o meno?

b) Ora supponiamo che la sua funzione di utilità sia $U(c) = \sqrt{1000 + c}$, dove c è il premio in euro. Si può dire se Mr Bean sia avverso al rischio? Giocherà oppure no?



Esercizio 23: piano di consumo condizionato e vincolo di bilancio

Esercizio 23

Gino si guadagna da vivere vendendo occhiali da sole. Se c'è il sole guadagna 30 euro, se piove guadagna solo 10 euro. Supponiamo che ci siano solo 2 tipi di tempo con uguale possibilità di verificarsi: sole o pioggia. Supponiamo che non si possa prevedere il tempo.

C'è in zona un casinò che offre un nuovo gioco: accetta scommesse sul fatto che piova o che ci sia sole il giorno successivo vendendo dei "pioggia-coupons", con la data, per 1 euro. Se il giorno successivo piove, il casinò paga 2 euro per ogni coupon comprato il giorno prima. Se non piove non paga nulla.

a) Individuare su un grafico il piano di consumo condizionato di Gino se non gioca al casinò.

b) Sullo stesso grafico segnare il piano di consumo condizionato nel caso in cui acquistasse 10 coupons del casinò.

c) Sullo stesso grafico disegnare il vincolo di bilancio che rappresenta tutte le altre possibilità di consumo che Gino può raggiungere comprando coupons (anche in modo frazionato). Qual è la pendenza del vincolo prima e dopo la sua dotazione iniziale?

d) Supponiamo ora che il casinò venda anche "sole-coupon", sempre datati, al prezzo di 1 euro. In questo caso se non piove il casinò paga 2 euro, se piove non paga nulla. Disegnare il nuovo vincolo di bilancio quando è possibile acquistare anche questi coupons.

Soluzione

a) Se non gioca al casino, Gino consumerà 30 euro se c'è il sole (C_s) e 10 euro se piove (C_p). Vedi punto A del grafico.

b) L'acquisto di 10 coupons comporterà un costo di 10 euro. Se piove, i coupons frutteranno 20 euro, se c'è il sole non pagheranno nulla. In caso di sole, i consumi di Gino saranno dati da: $C_s = 30 - 10 = 20$ euro. In caso di pioggia, i consumi saranno $C_p = 10 + 20 - 10 = 20$ euro. Vedi punto B del grafico.

c) Indichiamo con k il numero di coupons acquistati. Se piove i consumi sono pari a $C_p = 10+2k-k = 10 + k$; se c'è il sole i consumi sono pari a $C_s = 30 - k$. Mettendo a sistema otteniamo:

$$\begin{cases} 10 + k = C_p \\ 30 - k = C_s \end{cases} \Longrightarrow \qquad \begin{cases} k = C_p - 10 \\ C_p = 40 - C_s \end{cases}$$

Se $k = 0$, otteniamo la dotazione iniziale A. Se $k > 0$, avremo che $C_p = 10 + k$ e $C_s = 30 - k$. Nell'area sopra e a sinistra della dotazione iniziale la pendenza del vincolo di bilancio $C_p = 40 - C_s$ è pari a -1. Dato che con $k \geqslant 0$ abbiamo che $C_p \geqslant 10$ e $C_s \leqslant 30$, non possiamo determinare la pendenza del vincolo di bilancio quando $C_p < 10$ e $C_s > 30$ perchè quest'area contiere panieri non raggiungibili da Gino.

d) Nel caso si possano acquistare due tipi di coupons, i consumi in caso di pioggia sono pari a $C_p = 10 + 2k - k - j$, dove j è il numero di "sole-coupons". I consumi in caso di sole sono pari a $C_s = 30 - k + 2j - j$. Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} 10 + k - j = C_p \\ 30 - k + j = C_s \end{cases} \implies \qquad \begin{cases} k - j = C_p - 10 \\ 30 - C_p + 10 = C_s \implies C_p = 40 - C_s \end{cases}$$

Il nuovo vincolo di bilancio è uguale a quello precedente. Tuttavia c'è una differenza rispetto al punto precedente: la presenza di due tipi di coupons permetterà di consumare i panieri con $C_p < 10$ e $C_s > 30$. Quindi il vincolo di bilancio potrà essere tracciato anche nell'area che si trova a destra e in basso rispetto al punto A.

Esercizio 24

Tiberio ha un futuro da calciatore professionista e una funzione di utilità del tipo $u(c) = \sqrt{c}$. Intanto si allena per il Camacici AC. Se nel frattempo non si fa seriamente male, potrà giocare con il Milan con un contratto da 1 milione di Euro. Se invece si fa male, può scegliere di allenare i pulcini della sua città con un contratto di 10 mila Euro. C'è una probabilità del 10% che si faccia seriamente male e che non finisca mai al Milan.

a) Qual è l'utilità attesa di Tiberio?

b) Se Tiberio paga x Euro per un'assicurazione che gli dà 1 milione di Euro nel caso in cui si faccia male, allora è sicuro di avere un reddito pari a (1.000.000 – x) Euro qualunque cosa accada. Quanto è il massimo che disposto a pagare per questa polizza?

Esercizio 25

Anna ha una funzione d'utilità del tipo $U(x) = 10x$. Deve decidere se partecipare alla lotteria (L) che le dà un guadagno di 1000 Euro con probabilità uguale ad 1/4 o 100 Euro con probabilità pari a 3/4.

a) Qual è la somma che Anna sarebbe disposta a pagare per partecipare alla lotteria?

b) Se la funzione di utilità di Anna fosse $U(x) = \sqrt{x}$, sarebbe disposta a pagare di più o meno per partecipare alla lotteria?

Soluzione

a) Possiamo verificare che Anna è neutrale al rischio dato che $U[E(L)] = E[U(L)]$:

$$\begin{aligned} E[L] &= 1000 * \frac{1}{4} + 100 * \frac{3}{4} = 250 + 75 = 325 \\ U[E(L)] &= 10 * 325 = 3250 \\ E[U(L)] &= \frac{1}{4} * (10 * 1000) + \frac{3}{4}(10 * 100) = 3250. \end{aligned}$$

Per partecipare alla lotteria, Anna è disposta a pagare l'equivalente certo ($\tilde{x}$, che nel caso di neutralità al rischio coincide con il valore atteso):

$$10 * \tilde{x} = E[U(L)] = 3250 \implies \tilde{x} = 325.$$

b) Data la nuova funzione d'utilità $U(x) = \sqrt{x}$ e sapendo che $E(L) = 325$ calcoliamo:

$$U[E(L)] = \sqrt{325} = 18,03$$
$$E[U(L)] = \frac{1}{4} * \sqrt{1000} + \frac{3}{4}\sqrt{100} = 7,91 + 7,5 = 15,41.$$

Dato che $U[E(L)] > E[U(L)]$, Anna è avversa al rischio. Conseguentemente l'equivalente certo sarà inferiore al valore atteso:

$$\sqrt{\tilde{x}} = E[U(L)] = 15,41 \implies \tilde{x} = 15,41^2 = 237,31 < 325 = E(x).$$

Esercizio 26

Agata, che ha una funzione di utilità del tipo $U(x) = x^2$, deve decidere se partecipare alla lotteria (L) che le darebbe un guadagno di 90 con probabilità 1/3 e un guadagno di 30 con probabilità 2/3.

a) Qual è l'atteggiamento di Agata verso il rischio?

b) Se la partecipazione alla lotteria comporta un costo di 50, quale sarà la scelta di Agata?

c) Se il padre di Agata le offrisse la possibilità di scegliere tra una somma di 60 e la partecipazione alla lotteria, quale sarà la scelta di Agata?

Esercizio 27

Mr Smith sta pensando di ripartire il suo portafoglio tra un'attività a rischio con rendimento atteso pari al 30% e scarto quadratico medio del 10% e un'attività esente da rischio con rendimento atteso 10% e scarto quadratico medio 0%.

a) Se Mr Smith investe la frazione x della sua ricchezza nell'attività a rischio, quale sarà il rendimento atteso del suo portafoglio?

b) E lo scarto quadratico medio?

c) Risolvere le due equazioni per determinare il rendimento atteso del portafoglio di Mr Smith in funzione dello scarto quadratico medio.

d) Rappresentare questa retta di bilancio su un grafico.

e) Se la funzione di utilità di Mr Smith è $U(r_x, \sigma_x) = \min[r_x, 0,3 - 2\sigma_x]$, determinare la sua scelta ottima di r_x e σ_x.

f) Rappresentare sul grafico la scelta ottima e la curva di indifferenza che passa per quel punto.

g) Quale frazione della sua ricchezza investirà Mr Smith nell'attività a rischio?

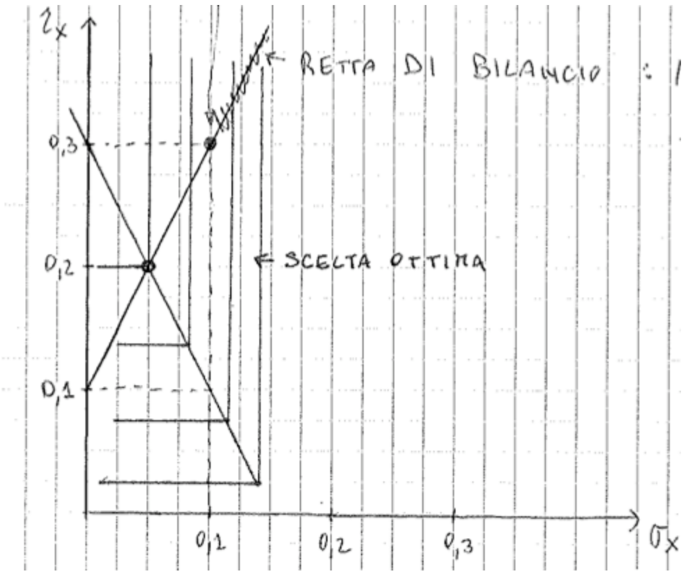
Soluzione

a) Indichiamo con r_m il rendimento dell'attività rischiosa e con r_f il rendimento dell'attività priva di rischio. Il rendimento atteso del portafoglio sarà pari a:

$$r_x = x * r_m + (1 - x) * r_f = 0,30x + 0.10(1 - x).$$

b) Indichiamo con σ_m lo scarto quadratico medio dell'attività rischiosa e con σ_f quello dell'attività priva di rischio. Lo scarto quadratico medio del protafoglio sarà pari a:

$$\sigma_x = x * \sigma_m + (1 - x) * \sigma_f = x\sigma_m = 0,10x.$$



Esercizio 27: scelta di portafoglio

c) Dal punto precedente ricaviamo $x = 10\sigma_x$, sostituendo nel rendimento atteso del portafoglio (a) otteniamo la retta di bilancio: $r_x = 10\sigma_x * 0,30 + 0,1(1 - 10\sigma_x) \implies r_x = 2\sigma_x + 0,1$.

d) L'inclinazione della retta di bilancio è pari a: $(r_m - r_f)/\sigma_m$. La retta di bilancio termina quando $r_x = 0,3$ e $\sigma_x = 0,1$, infatti se $x = 1$, $\sigma_x = 0,1$ e $r_x = 0,3$.

e) Dalla funzione di utilità otteniamo: $r_x = 0,3 - 2\sigma_x$ che mettiamo a sistema con il vincolo di bilancio per determinare la scelta ottima di r_x e σ_x:

$$\begin{cases} r_x = 0,3 - 2\sigma_x \\ r_x = 2\sigma_x + 0,1. \end{cases} \implies \begin{cases} r_x^* = 0,2 \\ \sigma_x^* = 0,05. \end{cases}$$

f) Sostituendo r_x^* e σ_x^* nel rendimento atteso del portafoglio ottenuto al punto (a), otteniamo: $0,2 = 0,3x + 0,1(1 - x) \implies x = 0.50$.